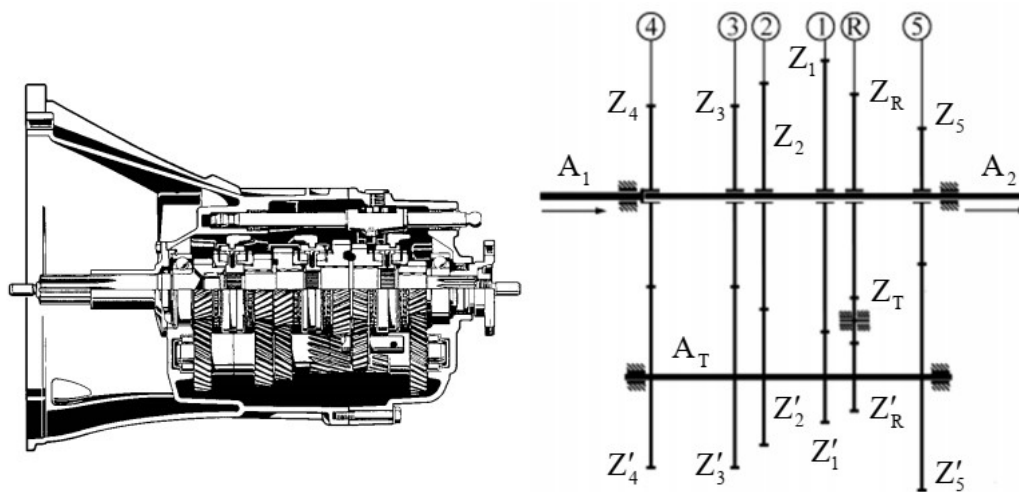


# DAO ĐỘNG XOẮN TRONG CÁC HỆ TRUYỀN ĐỘNG

## 1. MỞ ĐẦU

Hạn chế hoặc khử dao động xoắn có tầm quan trọng quyết định đối với hầu hết các máy có bộ phận quay vì dao động này ảnh hưởng đáng kể đến tuổi thọ sử dụng cũng như đối với quá trình vận hành hoặc kết quả làm việc (chẳng hạn đối với máy in).

Việc nghiên cứu các hệ thống dao động xoắn xuất phát từ các trường hợp hư hỏng đáng kể của máy, cùng với sự phát triển của động cơ đốt trong sử dụng làm động cơ truyền động cho các hệ thống phương tiện giao thông như tàu thủy, ô tô. Khi sử dụng động cơ đốt trong như một bộ phận truyền động, cần kết nối động cơ với hệ thống bánh răng để điều chỉnh đặc tính động cơ với dải tốc độ đầu ra lớn. Xét ví dụ điển hình của hệ thống truyền động bánh răng là một hộp số của xe ô tô năm tốc độ (Hình 1).



**Hình 1 - Hộp số 5 tốc độ (5 số tiến và 1 số lùi)**

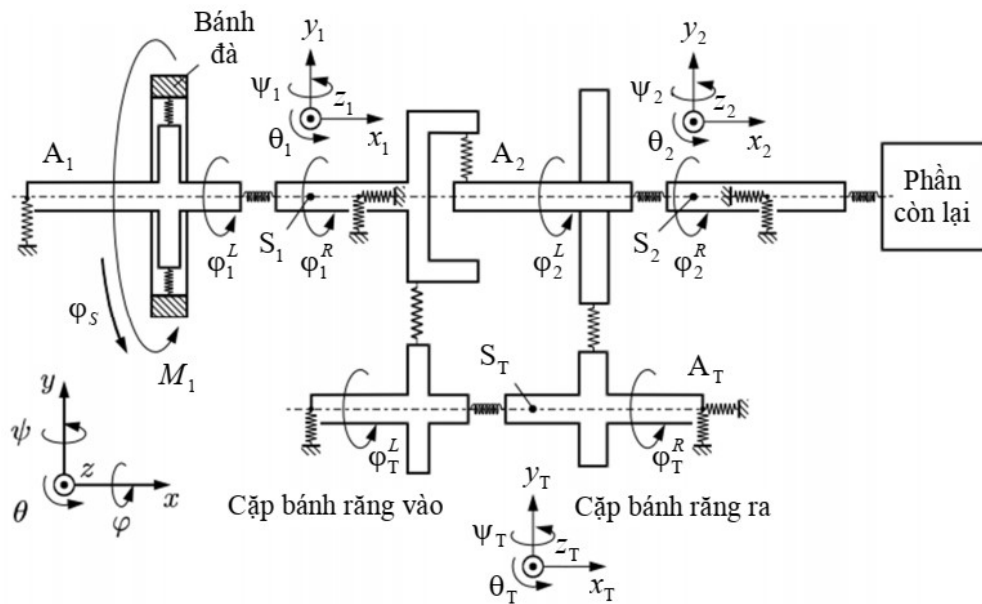
Chuyển động được truyền từ trục vào  $A_1$  qua trục trung gian  $A_T$  đến trục ra  $A_2$ . Các bánh răng được lắp chặt trên trục trung gian, ngược lại các bánh răng trên trục ra được thiết kế có thể quay tự do trên trục. Các bánh răng trên trục trung gian và trục ra luôn ăn khớp với nhau. Tại mỗi thời điểm có một bánh răng trên trục ra được kết nối với trục ra bằng ly hợp để truyền mômen xoắn. Để thực hiện số lùi, chiều quay của trục ra được đảo ngược cùng với bánh răng  $Z_R$ , bánh răng này sẽ quay theo chiều ngược lại với trục vào nhờ bánh răng trung gian. Số 4 của hộp số là trường hợp đặc biệt, trong đó trục vào được nối trực tiếp với trục ra và được dẫn động bởi bánh đà.

Để tính toán chuyển động của hệ, xét mô hình tương đương của một phần của hộp số biểu diễn trong Hình 2, trong đó giả thiết:

- Các ổ trục có vị trí xác định.
- Chuyển động của các trục được mô tả bằng 7 tọa độ suy rộng, bao gồm
  - Các tọa độ biểu diễn chuyển động của vật rắn:
    - ❖ Chuyển động của trọng tâm theo hệ trục vuông góc:  $x, y, z$
    - ❖ Góc quay của trục quanh trục  $y$ :  $\psi$
    - ❖ Góc quay của trục quanh trục  $z$ :  $\theta$
  - Các tọa độ đặc trưng cho biến dạng đàn hồi (xoắn):
    - ❖ Góc quay của phần trục bên trái:  $\varphi^L$
    - ❖ Góc quay của phần trục bên phải:  $\varphi^R$

Các chỉ số dưới “1”, “2”, “T” tương ứng với các trục vào, trục ra và trục trung gian.

- Dao động xung quanh điểm làm việc bình ổn (trục quay với vận tốc góc không đổi,  $\dot{\varphi}_S = \Omega = \text{const}$ ).
- Tuyến tính hóa độ cứng phi tuyến tính đối với ổ trục và sự tiếp xúc của cặp bánh răng tại điểm làm việc.



**Hình 2 - Mô hình dao động của hộp số 5 tốc độ**

Mô hình dao động như trên của hộp số bao gồm 21 bậc tự do. Nếu xét đến các thành phần tiếp sau của hệ thống truyền động như hộp phân phối, trục dẫn động cầu sau, vi sai cầu sau, trục dẫn động bánh sau, số bậc tự do cần thiết để mô tả hệ truyền động có thể tăng lên 29 bậc tự do. Như vậy, các mô hình thích hợp để tính toán dao động xoắn thường dẫn đến hệ phương trình vi phân tuyến

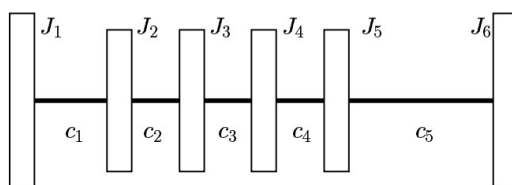
tính với số lượng lớn bậc tự do. Đối với một số trường hợp có thể áp dụng phương pháp giải tổng quát, trong khi nhiều mô hình cần các phương pháp giải riêng phù hợp hơn.

## 2. MÔ HÌNH DAO ĐỘNG XOẮN

Một hệ xoắn gồm một hay nhiều trục quay với vận tốc góc khác nhau, liên kết với nhau bằng các bộ truyền chuyển động quay như bộ truyền bánh răng, bộ truyền đai, ly hợp, bộ truyền ma sát. Trên các trục gắn cứng các chi tiết quay hình đĩa như rôto, bánh đai, bánh răng, hoặc các khâu thay thế. Trong hầu hết các trường hợp, các chi tiết này được giả thiết là tuyệt đối cứng, có mômen quán tính đối với trục quay là hằng số  $J_k$ . Các đoạn trục nối hai đĩa có tính đàn hồi, tức là có biến dạng xoắn khi chịu tải. Do mômen quán tính của trục đối với trục quay nhỏ hơn nhiều so với mômen quán tính của đĩa nên khối lượng của trục có thể được bỏ qua. Đặc trưng của đoạn trục là hằng số xoắn  $C_k$ , tỷ lệ nghịch với chiều dài của trục. Khi hệ có cản, lực cản tuyệt đối với hằng số cản  $b_k$  tác dụng vào đĩa, lực cản tương đối với hằng số cản  $d_k$  tác dụng vào cả hai đĩa nối đoạn trục này. Ngoại lực tác dụng vào hệ là mômen lực ngoài đặt vào các đĩa  $M_k(t)$ . Thông thường  $M_k(t)$  là hàm tuần hoàn, nhưng cũng nhiều trường hợp là hàm tùy ý. Có bốn dạng mô hình xoắn thường gặp, bao gồm mô hình dây một trục, mô hình dây nhiều trục, mô hình phân nhánh và mô hình vòng kín.

### 2.1. Mô hình dây một trục

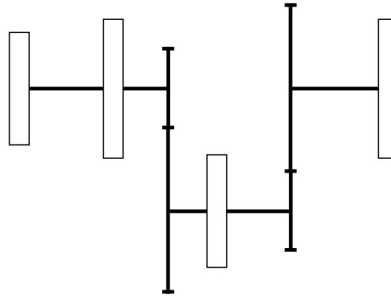
Mô hình dây một trục được biểu diễn trong Hình 3, bao gồm các khối lượng xoắn rời rạc liên kết với nhau bằng các lò xo xoắn không khối lượng. Mô hình này được sử dụng để tính toán dao động xoắn của trục khuỷu trong các động cơ đốt trong nhiều xi lanh, trong đó các đĩa là khâu thay thế của cơ cấu tay quay con trượt.



**Hình 3 - Mô hình dây một trục**

### 2.2. Mô hình dây nhiều trục

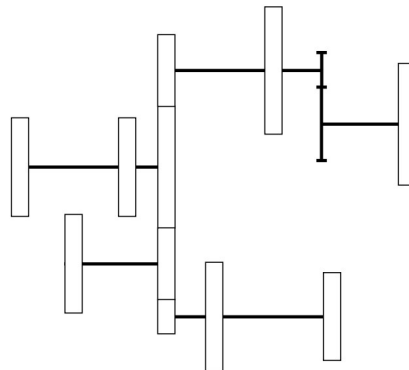
Mô hình dây nhiều trục thể hiện trong Hình 4 được sử dụng khi tính toán các bộ truyền bánh răng có tỷ số truyền không đổi. Sơ đồ động học ở đây có dạng cấu trúc cây không phân nhánh, có thể đưa được về mô hình dây một trục khi tính toán. Thí dụ có thể áp dụng mô hình này để nghiên cứu dao động xoắn của của hộp số sàn năm cấp.



**Hình 4 - Mô hình dây nhiều trục**

### 2.3. Mô hình phân nhánh

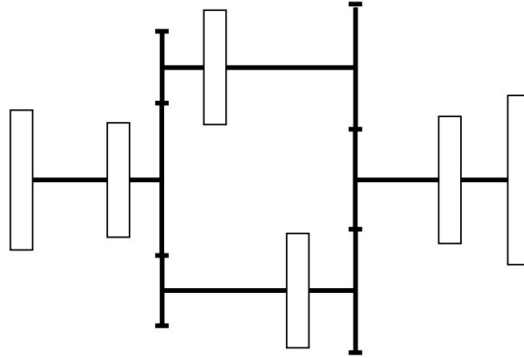
Mô hình phân nhánh gặp khi có hai hoặc nhiều bộ truyền dẫn động cùng một bộ phận công tác, hoặc một bộ truyền dẫn động nhiều bộ phận công tác khác nhau. Cấu trúc này có điểm đặc trưng là tại một vị trí trong sơ đồ động học được chia ra thành các nhánh riêng biệt (Hình 5). Mô hình này không thể quy đổi về dạng mô hình dây một trục. Việc tính toán chỉ có thể thực hiện từ ngoài vào đến vị trí phân nhánh. Sau đó, các cấu trúc con được ghép nối thông qua các ràng buộc hình học tại vị trí phân nhánh.



**Hình 5 - Mô hình phân nhánh**

### 2.4. Mô hình vòng kín

Mô hình vòng kín gặp khi tính toán các bộ truyền bánh răng kín. Với các hệ truyền động vòng kín như trong Hình 6, dòng công suất ban đầu được chia theo các nhánh khác nhau và sau đó tập hợp lại với nhau. Với cấu trúc này, khe hở trong hệ thống truyền động có thể được triệt tiêu thông qua các nhánh truyền động ăn khớp chặt với nhau. Ứng dụng của mô hình này có thể thấy trong máy in hoặc trong cơ cấu chia tải trọng.



**Hình 6 - Mô hình vòng kín**

Bên cạnh việc phân loại các hệ xoắn theo các mô hình nêu trên, cần phân biệt hệ bị ngàm hay hệ tự do. Hệ bị ngàm là hệ có ít nhất một đoạn trục có đầu cố định hoặc nối với động cơ có chuyển động đã biết.

### 3. THU GỌN MÔ HÌNH DAO ĐỘNG XOẮN VỀ MỘT TRỤC

Khi tính toán dao động xoắn thường gặp hệ nhiều trục, nếu hệ không phân nhánh luôn có thể thay thế bởi mô hình dây một trục và gọi là hệ thu gọn với các tham số mới cần xác định. Khi tính toán với hệ có phân nhánh hoặc vòng kín, cần thu gọn về một trục chính được chọn tùy ý, trục còn lại là trục phụ. Thí dụ, hệ ban đầu trong Hình 7a được thu gọn thành mô hình dây một trục về trục chính I.

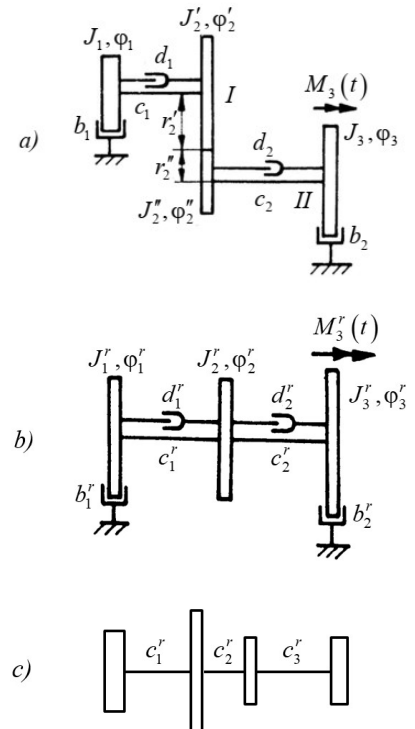
Tham số của hệ thu gọn có chỉ số trên  $r$ , được xác định từ các điều kiện biến dạng góc của các đĩa thuộc hệ cũ và mới phải như nhau, nghĩa là:

$$\begin{cases} \varphi_1^r = \varphi_1; \\ \varphi_2^r = \varphi_2'; \\ \varphi_2'' = -\frac{r_2'}{r_2''} \varphi_2'; \\ \varphi_3 = -\varphi_3^r \frac{r_2'}{r_2''} \end{cases} \quad (1)$$

Dựa vào điều kiện (1) có thể tính toán được các tham số của hệ thu gọn như dưới đây.

#### 3.1. Mômen quán tính thu gọn

Mômen quán tính thu gọn được tính từ điều kiện động năng của các phần tử tương ứng không đổi:



**Hình 7**

$$\begin{cases} \frac{1}{2} J_1^r (\dot{\varphi}_1^r)^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2; \\ \frac{1}{2} J_2^r (\dot{\varphi}_2^r)^2 = \frac{1}{2} J_2' (\dot{\varphi}_2')^2 + \frac{1}{2} J_2'' (\dot{\varphi}_2'')^2; \\ \frac{1}{2} J_3^r (\dot{\varphi}_3^r)^2 = \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}_3^2 \end{cases} \quad (2)$$

Kết hợp các điều kiện (1) và (2) thu được:

$$J_1^r = J_1; \quad J_2^r = J_2' + J_2'' \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2; \quad J_3^r = J_3 \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2 \quad (3)$$

### 3.2. Độ cứng trục thu gọn

Độ cứng trục thu gọn được tính từ điều kiện thế năng của các phần tử đàn hồi tương ứng không đổi:

$$\frac{1}{2} c_1^r (\varphi_1^r - \varphi_2^r)^2 = \frac{1}{2} c_1 (\varphi_1 - \varphi_2')^2; \quad \frac{1}{2} c_2^r (\varphi_2^r - \varphi_3^r)^2 = \frac{1}{2} c_2 (\varphi_2'' - \varphi_3)^2 \quad (4)$$

Kết hợp các điều kiện (1) và (4) thu được:

$$c_1^r = c_1; \quad c_2^r = c_2 \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2 \quad (5)$$

### 3.3. Hệ số cản thu gọn

Hệ số cản thu gọn được tính từ điều kiện công của các mômen cản tương ứng không đổi:

$$\begin{cases} b_1^r \dot{\varphi}_1^r \varphi_1^r = b_1 \dot{\varphi}_1 \varphi_1; & b_3^r \dot{\varphi}_3^r \varphi_3^r = b_3 \dot{\varphi}_3 \varphi_3; \\ d_1^r (\dot{\varphi}_2^r - \dot{\varphi}_1^r) (\varphi_2^r - \varphi_1^r) = d_1 (\dot{\varphi}_2' - \dot{\varphi}_1') (\varphi_2' - \varphi_1'); \\ d_2^r (\dot{\varphi}_3^r - \dot{\varphi}_2^r) (\varphi_3^r - \varphi_2^r) = d_2 (\dot{\varphi}_3'' - \dot{\varphi}_2'') (\varphi_3'' - \varphi_2'') \end{cases} \quad (6)$$

Kết hợp các điều kiện (1) và (6) thu được:

$$b_1^r = b_1; \quad b_3^r = b_3 \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2; \quad d_1^r = d_1; \quad d_2^r = d_2 \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2 \quad (7)$$

### 3.4. Mômen thu gọn

Mômen thu gọn được tính từ điều kiện công của các mômen ngoại lực ở vị trí tác dụng của chúng không đổi:

$$M_3^r(t) \varphi_3^r = M_3(t) \varphi_3 \quad (8)$$

Kết hợp các điều kiện (1) và (8) thu được:

$$M_3^r(t) = -M_3 \frac{r_2'}{r_2''} \quad (9)$$

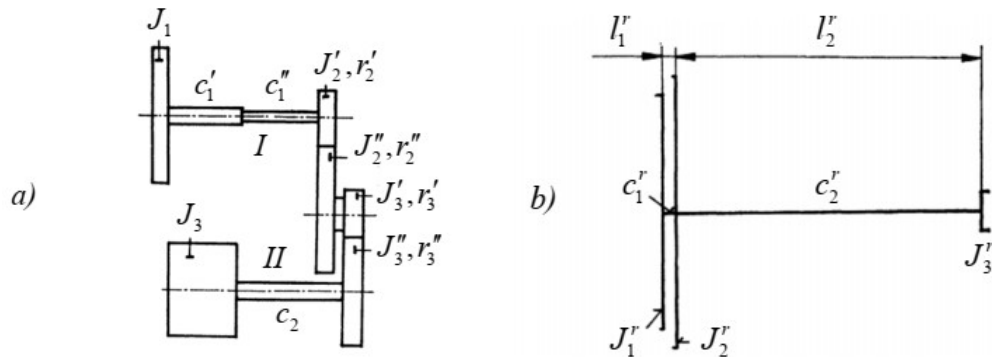
Như vậy, các tham số của hệ thu gọn (bao gồm mômen quán tính, hệ số đàn hồi, hệ số cản) đều tỷ lệ với bình phương tỷ số truyền, còn mômen lực kích động tỷ lệ bậc nhất với tỷ số truyền.

Phương pháp thu gọn trình bày trên đây áp dụng với giả thiết hai bánh răng ăn khớp  $J_2', J_2''$  là tuyệt đối cứng, hệ thu gọn gồm ba khối lượng. Trường hợp hai bánh răng này không tuyệt đối cứng,  $\varphi_2' r_2'' \neq \varphi_2'' r_2'$ , cần thêm vào một phần tử đàn hồi  $c_2^r$  (Hình 7c) để thu được hệ gồm bốn khối lượng. Phương pháp tính các tham số của hệ này hoàn toàn tương tự như đối với hệ gồm ba khối lượng. Cần chú ý rằng, khi thu gọn hệ nhiều trục về mô hình dây một trục, các tham số có thể thay đổi rất lớn.

*Thí dụ 4.1:* Thu gọn hệ truyền động cho ở Hình 8 về mô hình dây một trục với các tham số

$$J_1 = 2J; \quad J_2' = J; \quad J_2'' = 3J; \quad J_3' = 2J; \quad J_3'' = 3J; \quad J_3 = 12J;$$

$$c_1' = 3c; \quad c_1'' = c; \quad c_2 = c; \quad \frac{r_2'}{r_2''} = \frac{1}{2}; \quad \frac{r_3'}{r_3''} = \frac{1}{3}$$



**Hình 8**

Trước khi thu gọn cần thay thế hai đoạn trục  $c_1', c_1''$  bằng một trục có độ cứng tương đương

$$c_1 = \frac{c_1' c_1''}{c_1' + c_1''} = \frac{3}{4} c$$

Giả thiết các bánh răng tuyệt đối cứng, các bánh răng  $J_2'', J_3'$  nối liền với nhau. Thu gọn hệ về trục I thu được:

$$J_1^r = J_1 = 2J;$$

$$J_2^r = J_2' + (J_2'' + J_3') \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2 + J_3'' \left( \frac{r_3'}{r_3''} \right)^2 = \frac{7}{3} J;$$

$$J_3^r = J_3 \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2 \left( \frac{r_3'}{r_3''} \right)^2 = \frac{1}{3} J;$$

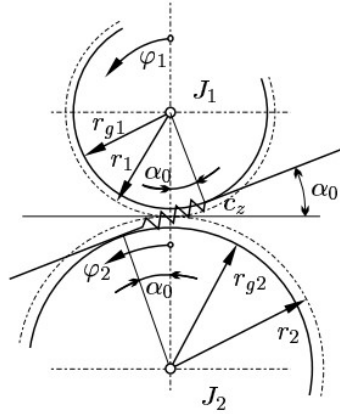
$$c_1^r = c_1 = \frac{3}{4} c; \quad c_2^r = c_2 \left( \frac{r_2'}{r_2''} \right)^2 \left( \frac{r_3'}{r_3''} \right)^2 = \frac{1}{36} c.$$

Kích thước như trong Hình 8b phản ánh gần đúng tỷ lệ tương đối của hệ thu gọn:

$$\frac{l_2^r}{l_1^r} = \frac{c_1^r}{c_2^r} = 27; \quad \frac{J_1^r}{J_3^r} = 6; \quad \frac{J_2^r}{J_3^r} = 7.$$

### 3.5. Độ cứng trong ăn khớp bánh răng

Khi tính toán dao động xoắn trong ăn khớp bánh răng, độ cứng của cặp bánh răng có thể được quy đổi tương đương với độ cứng của một lò xo tuyến tính nằm dọc theo đường ăn khớp, tiếp tuyến với các đường tròn cơ sở của các bánh răng (Hình 9). Góc ăn khớp được xác định trong trường hợp bánh răng tiêu chuẩn không dịch chỉnh  $\alpha_0 = 20^\circ$ .



**Hình 9 - Mô hình tính toán độ cứng của bánh răng**

Phương trình vi phân chuyển động của các bánh răng 1 và 2 sau khi giải phóng liên kết là

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= -F_z r_{g1} \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= -F_z r_{g2} \end{aligned} \quad (10)$$

Trong đó, lực đàn hồi có thể biểu diễn dưới dạng

$$F_z = c_z (r_{g1} \varphi_1 + r_{g2} \varphi_2) \quad (11)$$



do dịch chuyển của điểm đặt lực phụ thuộc góc xoay của các bánh răng.

Xét các tam giác vuông có ba đỉnh là tâm bánh răng, điểm tiếp xúc của hai vòng lăn và điểm tiếp xúc của đường ăn khớp với đường tròn cơ sở tương ứng, các bán kính đường tròn cơ sở có thể được tính toán nhờ biểu thức sau

$$\cos \alpha_0 = \frac{r_{g1}}{r_1} = \frac{r_{g2}}{r_2} \quad (12)$$

Thế các biểu thức (11) và (12) vào (10) thu được phương trình vi phân chuyển động mô tả dao động xoắn tự do của cặp bánh răng ăn khớp,

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_z r_1^2 \cos^2 \alpha_0 & c_z r_1 r_2 \cos^2 \alpha_0 \\ c_z r_1 r_2 \cos^2 \alpha_0 & c_z r_2^2 \cos^2 \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

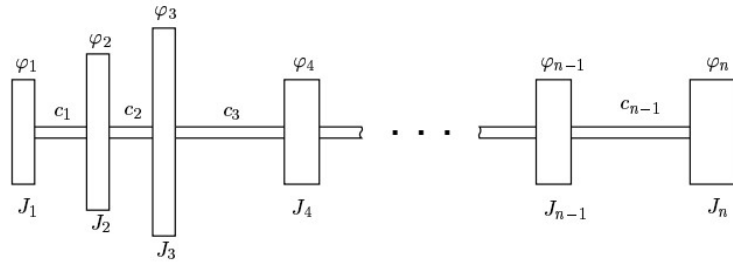
#### 4. DAO ĐỘNG XOẮN TỰ DO KHÔNG CẢN CỦA MÔ HÌNH DÂY

##### 4.1. Phương trình vi phân chuyển động

Dao động xoắn tự do của hệ tuyến tính rời rạc (chuỗi lò xo xoắn và khối lượng quay rời rạc) với số bậc tự do hữu hạn được mô tả bởi một hệ phương trình vi phân thường dạng thuần nhất

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (14)$$

trong đó, ma trận khối lượng  $\mathbf{M}$  và ma trận độ cứng  $\mathbf{C}$  là các ma trận đối xứng. Tính đối xứng của ma trận độ cứng có thể được suy ra theo định lý công thuận nghịch Maxwell-Betti, lực  $F_1$  tác dụng tại vị trí  $x_1$  gây ra chuyển vị tại vị trí  $x_2$  bằng giá trị chuyển vị tại vị trí  $x_1$  gây ra bởi lực  $F_2 = F_1$  đặt tại vị trí  $x_2$ .



Hình 10 - Mô hình dây n bậc tự do

Đối với dao động xoắn của mô hình dây một trục (Hình 10), sử dụng phương trình Lagrange loại hai thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ có thể thu được ma trận khối lượng và ma trận độ cứng:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Khi nghiên cứu các hệ dao động xoắn, ta phân biệt hai dạng điều kiện biên:

*Hệ xoắn chịu liên kết* khi chuyển động được cho trước tại ít nhất một đầu cuối của hệ. Đây là trường hợp khi một đầu của hệ được kẹp chặt hoặc được nối với một khối lượng quay lớn đến mức có thể bỏ qua dao động xoắn của khối lượng quay đó. Đối với hệ dao động này, ma trận độ cứng của hệ không suy biến,

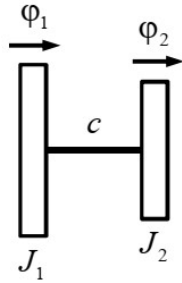
$$\det(\mathbf{C}) \neq 0 \quad (16)$$

*Hệ xoắn tự do hoặc không chịu liên kết* khi các đầu cuối của hệ có thể chuyển động tự do. Đặc trưng của hệ dao động này là ma trận độ cứng suy biến,

$$\det(\mathbf{C}) = 0 \quad (17)$$

*Thí dụ 4.2:* Xét hệ dao động xoắn tự do như trong Hình 11 gồm hai khối lượng quay  $(J_1, J_2)$  và một lò xo xoắn trung gian (độ cứng xoắn  $c$ ), chọn hệ tọa độ suy rộng là các góc  $\varphi_1$  và  $\varphi_2$ .

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng thu được các phương trình vi phân chuyển động



**Hình 11 - Hệ dao động xoắn 2 bậc tự do**

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = -c(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = c(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Biểu diễn các phương trình chuyển động dưới dạng ma trận ta có

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

với vectơ tọa độ suy rộng

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy ma trận độ cứng  $\mathbf{C}$  của hệ xoắn tự do đã cho là ma trận suy biến vì định thức của nó

$$\det(\mathbf{C}) = c^2 - c^2 = 0.$$

#### 4.2. Tần số riêng và dạng dao động riêng

Để tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân thuần nhất (14) ta sử dụng phương pháp biên độ phức biểu diễn nghiệm dưới dạng

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} \cdot e^{j\omega t} \quad (18)$$

thay vào phương trình (14) dẫn đến bài toán giá trị riêng tổng quát

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (19)$$

Để phương trình đại số tuyến tính thuần nhất (19) có nghiệm không tầm thường, các giá trị riêng  $\omega_i$  cần thỏa mãn phương trình đặc trưng hoặc phương trình tần số

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (20)$$

Giải phương trình (20) tìm được  $n$  nghiệm  $\omega_i^2$ . Đối với hệ xoắn không chịu liên kết (hai đầu tự do) luôn có  $\omega_1 = 0$ .

Thay lần lượt các giá trị riêng  $\omega_i$  vào phương trình (19) nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính suy biến xác định vectơ riêng tương ứng  $\mathbf{v}_i$

$$(\mathbf{C} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \cdot \mathbf{v}_i = 0. \quad (21)$$

Do các vectơ riêng  $\mathbf{v}_i$  được tính toán từ hệ phương trình suy biến (có định thức hệ số bằng không) nên các thành phần của  $\mathbf{v}_i$  có thể chọn tùy ý sai khác một hằng số nhân, nghĩa là có thể chuẩn hóa các vectơ riêng đó.

Các giá trị riêng  $\omega_i$  gọi là các tần số riêng của dao động xoắn tự do, các vectơ riêng tương ứng  $\mathbf{v}_i$  biểu diễn các dạng dao động riêng của hệ.

*Thí dụ 4.3:* Xét hệ dao động xoắn tự do ở thí dụ 4.2, các ma trận khối lượng và ma trận độ cứng tương ứng là

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}.$$

Sử dụng dạng nghiệm phức dẫn đến bài toán giá trị riêng tổng quát

$$\mathbf{q} = \mathbf{v}.e^{j\omega t} \Rightarrow \begin{bmatrix} c - J_1\omega^2 & -c \\ -c & c - J_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

với  $\mathbf{v}$  là véctơ riêng.

Từ phương trình đặc trưng

$$\begin{vmatrix} c - J_1\omega^2 & -c \\ -c & c - J_2\omega^2 \end{vmatrix} = \omega^2 [J_1J_2\omega^2 - c(J_1 + J_2)] = 0$$

có thể xác định các giá trị riêng

$$\omega_1 = 0 \quad \text{và} \quad \omega_2 = \pm \sqrt{\frac{c(J_1 + J_2)}{J_1J_2}}$$

Do hệ dao động đang xét là hệ tuyến tính không cản nên các giá trị riêng tìm được đều là số thực. Thay các giá trị riêng này vào hệ phương trình suy biến ta thu được

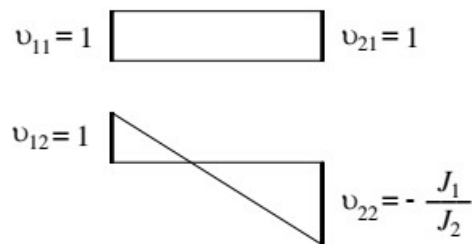
$$\omega_1 = 0 \Rightarrow cv_{11} - cv_{21} = 0$$

và 
$$\omega_2 = \pm \sqrt{\frac{c(J_1 + J_2)}{J_1J_2}} \Rightarrow \left[ c - \frac{c(J_1 + J_2)}{J_2} \right] v_{12} - cv_{22} = 0.$$

Chuẩn hóa thành phần đầu tiên của các véctơ riêng về giá trị 1 nhận được các véctơ riêng thực

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{J_1}{J_2} \end{bmatrix}.$$

Dạng riêng của hệ dao động xoắn hai đầu tự do được biểu diễn trên Hình 12.



**Hình 12 - Dạng dao động riêng của hệ xoắn 2 bậc tự do**

Dễ dàng nhận thấy giá trị riêng  $\omega_1 = 0$  tương ứng với chuyển động như một vật rắn của cả hệ

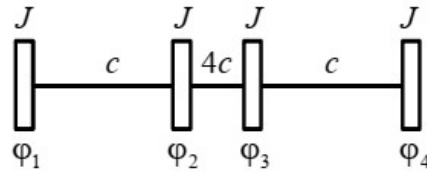
( $v_{11} = v_{21}$ ) và giá trị riêng  $\omega_2 = \pm \sqrt{\frac{c(J_1 + J_2)}{J_1J_2}}$  ứng với chuyển động ngược pha của hai khối lượng ( $v_{12} > 0, v_{22} < 0$ ).

Dao động tự do của hệ được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} q_1 &= v_{11} [A_1 + A_2 t] + v_{12} [A_3 \cos(\omega_2 t) + A_4 \sin(\omega_2 t)], \\ q_2 &= v_{21} [A_1 + A_2 t] + v_{22} [A_3 \cos(\omega_2 t) + A_4 \sin(\omega_2 t)], \end{aligned}$$

trong đó, các hằng số  $A_i$  được xác định từ các điều kiện đầu của dao động.

*Thí dụ 4.4:* Cho mô hình dao động xoắn như Hình 13. Xác định tần số riêng và dạng dao động riêng tương ứng.



**Hình 13 - Hệ dao động xoắn 4 bậc tự do**

Áp dụng phương trình Lagrange loại hai dễ dàng thiết lập được phương trình vi phân chuyển động của hệ với các biểu thức động năng và thế năng lần lượt là

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_4^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2} c (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} (4c) (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} c (\varphi_3 - \varphi_4)^2. \end{aligned}$$

Từ đó thu được các ma trận khối lượng và ma trận độ cứng tương ứng

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c & 0 & 0 \\ -c & 5c & -4c & 0 \\ 0 & -4c & 5c & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số (20) dẫn đến

$$\begin{vmatrix} c - J\omega^2 & -c & 0 & 0 \\ -c & 5c - J\omega^2 & -4c & 0 \\ 0 & -4c & 5c - J\omega^2 & -c \\ 0 & 0 & -c & c - J\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

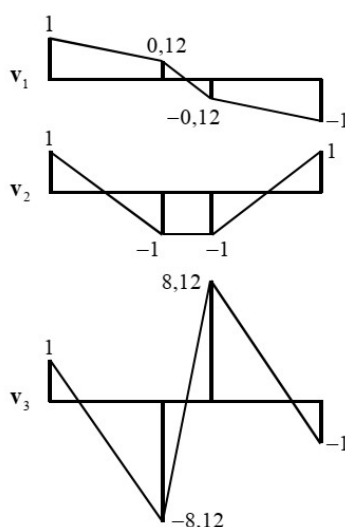
Khai triển định thức và giải thu được các giá trị riêng xác định bởi

$$\omega_0^2 = 0; \quad \omega_1^2 = 0,88 \frac{c}{J}; \quad \omega_2^2 = 2 \frac{c}{J}; \quad \omega_3^2 = 9,12 \frac{c}{J}.$$

Thay các giá trị riêng khác không vừa tìm được vào phương trình suy biến (19) giải được các vectơ riêng sau khi chuẩn hóa

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,12 \\ -0,12 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -8,12 \\ 8,12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng kiểm tra tính trực giao của các dạng dao động  $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$ . Dạng dao động ứng với các tần số riêng tương ứng của hệ dao động xoắn đang xét được biểu diễn trên Hình 14. Có thể nhận thấy, với tần số thứ nhất có một điểm trên trục không dao động (điểm nút), với tần số thứ hai có hai điểm nút, ... và kết quả này vẫn đúng với hệ nhiều bậc tự do hơn.



**Hình 14 - Dạng dao động riêng của hệ xoắn 4 bậc tự do**

## 5. KẾT LUẬN

Báo cáo này nghiên cứu các hệ thống dao động xoắn xuất phát từ các trường hợp hư hỏng đáng kể của máy, cùng với sự phát triển của động cơ đốt trong sử dụng làm động cơ truyền động cho các hệ thống phương tiện giao thông như tàu thủy, ô tô. Khi sử dụng động cơ đốt trong như một bộ phận truyền động, cần kết nối động cơ với hệ thống bánh răng để điều chỉnh đặc tính động cơ với dải tốc độ đầu ra lớn. Kết quả nghiên cứu góp phần dự đoán và giảm thiểu các sai lệch và hư hỏng trong các hệ thống truyền động phổ biến.